САБАҚТЫҢ МАҚСАТЫ, МІНДЕТТЕРІ, ӘДІСТЕМЕЛІК ДЕҢГЕЙІ

Қазіргі заман - математика ғылымының өте кең, жан-жақты тараған кезеңі. Оқушылардың математикалық сауаттылығын арттыру, олардың алған білімінің тиянақты болуын қамтамасыз ету, алған білімін қолданбалы мақсатқа бағыттау - заман талабы болып отыр. Оқушылардың математикалық сауаттылығын жан-жақты жетілдіру – қазіргі аса маңызды міндеттердің бірі. Дарынды балалардың қабілетін дамытудың жолдары жеткілікті. Оқушылардың пәнге қызығушылығын оятатын, олардың математикалық ой-өрісінің, шығармашылық қабілетінің дамуына дәнекер болатын қосымша тақырыптар мен сұрақтар көп әсерін тигізеді. Мұндай сұрақтарды орта мектепте арнайы сабақтарда, факультативтік сабақтарда қарастырудың ерекше маңызы бар. Сондай сұрақтардың бірі - комплекс сандардың ғылыми зерттеулерде кең түрде қолданысқа ие болуы. Қазіргі дәріс сабағында комплекс сандарды геометриялық есептерді шығаруға қолдану әдістемесі көрсетіледі.

Сабақтың мақсаты: **Комплекс сандарды геометрия теоремаларын дәлелдеуге, геометриялық және алгебралық есептерді шығаруға қолдану дағдыларын қалыптастыру.**

***Міндеті*:**

- **Оқушыларды шығармашыққа ынталандыру;**
- **Оқушылардың ғылыми – зерттеу және шығармашылық іздену қабілетінің қалыптасуына жағдай жасау.**

Дәрісті меңгеру барысында оқушылар төмендегідей құзіреттілікке ие болу қажет:

***Білу қажет*:**

- **Геометриялық есептерді алгебраландыру, немесе керісінше біліктілікке ие болу;**
- **Комплекс сандар алгебрасын және векторлық алгебраны терең білу.**

***Істей білу қажет*:**

- **Геометриялық теоремаларды дәлелдеу, есептерді шығару кезінде неғұрлым ұтымды әдістерді таңдай білу және қолдана білу;**
- **Комплекс сандарды геометриялық салу есептерін орындауға қолдана білу.**

КОМПЛЕКС САНДАРДЫҢ МАҢЫЗЫ

- **Қазіргі уақытта комплекс сандар математикалық пәндерде де, физика пәнінде де, көптеген техникалық пәндерде де кеңінен қолданылады. Кейбір жағдайларда комплекс сандарды қолдану есепті шығаруға мүмкіндік береді және алынған аналитикалық өрнектерді ықшам және талғампаз түрінде жазуға мүмкіндік береді.**
- **Комплекс сандар аппараттарымен жұмыс істеу дағдылары жаңа фактілерді ашуға және жалпылау жасауға мүмкіндік береді. Математика мен физикада комплекс сандарды кеңінен қолдану, бір жағынан, студенттерді осы сандардың шынайылығы мен пайдалылығына сендіреді. Екінші жағынан, күрделі сандармен жұмыс істеу шеберлігі өте қызықты және маңызды, әсіресе техникалық университеттердің болашақ студенттері үшін. Сондықтан, математикалық бейіні бар орт а мектепте элективті сыныптарда күрделі сандарды зерттеу, олардың геометрия, тригонометрия, физика мәселелеріне қосымшалары оқушылардың математикалық дайындығының д еңгейін жоғарылатады.**

ПТОЛЕМЕЙ ТЕОРЕМАСЫ

- **Комплекс сандарды қолданып кейбір геометиялық теоремаларды және есептерді қарапайым**
- **дәлелдеуге болады. Птолемей теоремасының комплекс сандар арқылы тригонометриялық**
- **теңбе-теңдіктерді тағайындау нәтижесінде дәлелдемесін келтірелік.**
- ***<u>Птолемей теоремасы</u>. Шеңберге іштей сызылған дөңес төртбұрыштың***
- ***қарама-қарсы қабырғаларының ұзындықтарының көбейтінділерінің қосындысы оның диагоналдарының ұзындықтарының көбейтіндісіне тең болады.***
- ***Дәлелдеу.* ABCD - радиусы R, центрі O нүктесінде орналасқан шеңберге іштей сызылған төртбұрыш болсын**
- **(1-сурет). O нүктесін координаталар басы, Oa сәулесінің бағытын оң бағыттағы абсциссалар өсі ретінде таңдап алалық. B, C, D төбелері модулдері R-ге тең, бас аргументтері α,β,γ болатын x, y, z комплекс сандарға сәйкес келсін: B(x), C(y), D(z), A(R).**
- $|AB|\cdot|CD|+|AD|\cdot|BC|=|AC|\cdot|BD|$ **теңдікті дәлелдеу керек. Бұл теңдікті мына түрде жазуға болады**:

$$|x-R|\cdot|y-z|+|z-R|\cdot|y-x|=|y-R|\cdot|z-x|$$

Арақашықтықтардың әрқайсысын есептелік.

$$|x-R|=|R(\cos\alpha+i\cdot\sin\alpha)-R|=R|(\cos\alpha-1)+i\cdot\sin\beta|=R\sqrt{(\cos\alpha-1)^2+\sin^2\alpha}=R\sqrt{2-2\cos\alpha}=2R\sin\frac{\alpha}{2},$$

- **Сол сияқты**

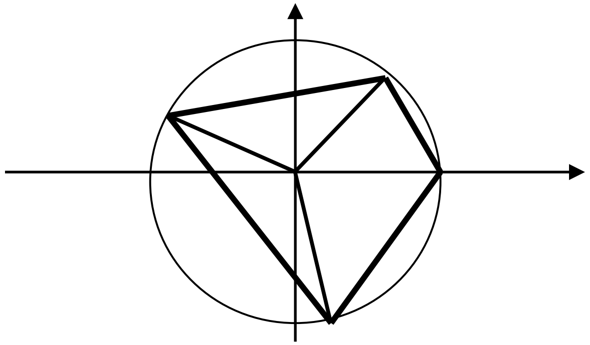
$$|y-R|=2R\sin\frac{\beta}{2},|z-R|=2R\sin\frac{\gamma}{2}. \quad |y-z|=\left|z(\frac{y}{z}-1)\right|=|z|\left|\frac{\cos\beta+i\cdot\sin\beta}{\cos\alpha+i\cdot\sin\alpha}-1\right|=R|\cos(\beta-\gamma)+i\cdot\sin(\beta-\gamma)-1|=2R\sin\frac{\beta-\gamma}{2},$$

$$|y-x|=2R\sin\frac{\beta-\alpha}{2}, \quad |z-x|=2R\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}.$$

- Сонда (1) теңдік мына түрде жазылады: $$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma-\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}=\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\lambda-\alpha}{2},$$

Бұл теңдікті дәлелдеу үшін айырманың синусының формуласын пайдалану жеткілікті:

$$\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\right)+\sin\frac{\gamma}{2}\left(\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\right)=\sin\frac{\beta}{2}\left(-\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)=\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}.$$



ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ ЕСЕПТЕР

Есеп 1. ABC *- кез келген үшбұрыш,* G *- медианаларының қиылысу нүктесі (ауырлық центрі),* Y *- биіктіктерінің қиылысу нүктесі (ортоцентрі),* O *- сырттай сызылған шеңбер центрі.* O, G, H *нүктелері коллинеар және* $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$ *болатынын дәлелдеңдер.*

Шешуі. $\omega(ABC)$ **- бірлік шеңбер ретінде алалық. Центр O - координаталар басы болсын. Комплекс сандар z_1, z_2, z_3 – сәйкес A, B, C төбелерінің координаталары болсын.**

.

$z_1 + z_2 + z_3$ - H нүктесінің координатасы екенін дәлелдейік BC түзуінің бұрыштық

коэфициенті $k = \frac{c-b}{\bar{c}-\bar{b}} = \frac{c-b}{\frac{1}{c}-\frac{1}{b}} = -bc.$.

$A(z_1)$ нүктесімен $P(z_1+z+z_3)$ нүктелерін қосатын түзудің бұрыштық коэффициенті

$$k' = \frac{b+c}{\bar{b}+\bar{c}} = \frac{b+c}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} = bc.$$

Бұдан $k + k' = 0$, яғни AP BC. Сол сияқты BP CA және CP AB.

Демек, $P(z_1 + z_2 + z_3)$ - H нүеьесімен беттеседі. Төбелері $A(z_1), B(z_2), C(z_3)$ нүктелері болатын болатын үшбұрыштың ауырлық центрінің координаталары $G(\frac{z_1+z_2+z_3}{3})$ болады. Сонда $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$ теңдігінің орындалатынын көрсету қиындық туғызбайды.

Есеп 2. ***Кез келген ABC үшбұрышы берілген. M - үшбұрыш жазықтығының кез келген нүктесі. A_1, B_1, C_1 -*** $\omega(ABC)$ ***M нүктесінің сәйкес BC, CA, AB түзулеріндегі ортогональ проекциялары болсын. A_1, B_1, C_1 нүктелерінің коллинеар болатынын дәлелдеңдер.***

Шешуі. $\omega(ABC)$ **- ABC үшбұрышына сырттай сызылған шеңберді бірлік шеңбер ретінде қарастыралық, оның центрі O - координаталар басы болсын. Сонда $A(z_1)$, $B(z_2)$, $C(z_3)$ және $M(z_0)$ делік. BC түзуінің және M нүктесі арқылы өтетін, оған перпендикуляр түзудің теңдеуі сәйкес мына түрде жазылады:** $z - z_1 = -\bar{z}_2\bar{z}_3(\bar{z} - \bar{z}_2)$ **және** $z - z_0 = -z_2 z_3(\bar{z} - \bar{z}_0)$ **немесе** $z + z_2 z_3 \bar{z} = z_2 + z_3$ **және** $z - z_2 z_3 \bar{z} = z_0 + z_2 z_3 \bar{z}_0$. **Бұл теңдеулерді қосып, M нүктесінің BC түзуіндегі ортогональ проекциясының координатасы табылады:** $a_1 = \frac{1}{2}(z_0 + z_2 + z_3 - z_2 z_3 \bar{z}_0)$.

Сол сияқты B нүктесінің координасын табамыз: $b_1 = \frac{1}{2}(z_0 + z_1 + z_3 - z_1 z_3 \bar{z}_0)$.

A_1B_1 түзуінің бұрыштық коэффициентін табалық:

$$a_1 - b_1 = \frac{1}{2}[z_2 - z_1 - z_3\bar{z}_0(z_2 - z_1)] = \frac{1}{2}(z_2 - z_1)(1 - z_3\bar{z}_0) = \frac{1}{2}(z_2 - z_1)\left(1 - \frac{z_3}{z_0}\right) = \frac{(z_2 - z_1)(z_0 - z_3)}{2z_0};$$

$$\bar{a}_1 - \bar{b}_1 = \frac{z_0}{2}\left(\frac{1}{z_0} - \frac{1}{z_3}\right)\left(\frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_1}\right) = \frac{(z_2 - z_1)(z_0 - z_{33})}{2z_1 z_2 z_3},\ \text{демек,}\ k = \frac{a_1 - b_1}{\bar{a}_1 - \bar{b}_1} = \frac{z_1 z_2 z_3}{z_0} = z_1 z_2 z_3 \bar{z}_0.$$

Сонда AB түзуінің теңдеуін жазуға болады: $z - a_1 = z_1 z_2 z_3 \bar{z}_0(z - \bar{a}_1)$, **немесе**

$$z - \frac{1}{2}(z_0 + z_1 + z_3 - z_2 z_3 \bar{z}_0) = z_1 z_2 z_3 \bar{z}_0\left[\bar{z} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z_0} + \frac{1}{z_2} + + \frac{1}{z_3} - \frac{z_0}{z_2 z_3}\right)\right],\ \text{немесе}$$

$$z - \frac{1}{2} z_1 z_2 z_3 \bar{z}_0 \bar{z} = \frac{1}{2}\left(z_0 + z_1 + z_3 - \frac{z_2 z_3}{z_0}\right) - \frac{z_1 z_2 z_3}{2z_0}\left(\frac{1}{z_0} + \frac{1}{z_2} + + \frac{1}{z_3} - \frac{z_0}{z_2 z_3}\right),\ \text{немесе}$$

$$z - \frac{1}{2} z_1 z_2 z_3 \bar{z}_0 \bar{z} = \frac{1}{2}\left(z_0 + z_1 + z_3 - \frac{z_2 z_3}{z_0} - \frac{z_1 z_2 z_3}{z_0^2} - \frac{z_1 z_2}{z_0} - \frac{z_1 z_3}{z_0} + z_1\right),\ \text{немесе}$$

$$z - \frac{1}{2} z_1 z_2 z_3 \bar{z}_0 \bar{z} = \frac{1}{2}\left(z_0 + \sigma_1 - \sigma_2 \bar{z}_0 - \sigma_3 \bar{z}_0^2\right),\ \text{мұндағы}\ \sigma_1 = z_1 + z_2 + z_3,\ \sigma_2 = z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3,\ \sigma_3 = z_1 z_2 z_3.$$

C_1 **нүктесінің** $c_1 = \frac{1}{2}(z_0 + z_1 + z_2 - z_1 z_2 \bar{z}_0)$ **координатасы бұл теңдеудеуді қанағаттандырады, яғни** C_1 **нүктесі** B_1C_1 түзуіне тиісті болады.

Ескерту. **Егер M нүктесі** $\omega(ABC)$ **шеңберге тиісті болса, онда оның BC, CA, AB қабырғалардағы A_1, B_1, C_1 нүктелерінің коллинеар болмайды.**

Есеп 3. ***Жазықтықта берілген дұрыс көпбұрыштың төбелеріне дейінгі арақашықтықтарының квадраттарының қосындысы d-ға тең нүктелердің геометриялық орнын көрсетіңдер.***

Шешуі. **Бұл геометриялық есепті сурет пайдаланбай-ақ шығаралық. n-бұрышты көпбұрыштың центрі О - координаталар басы болсын; абсциссалар өсінің оң бағытын көпбұрыштың A_0 төбесі арқылы жүргізелік. Сонда көпбұрыштың төбелеріне $w_0=R$, w_1, w_2, … , w_{n-1} комплекс сандары сәйкес келеді, мұнда R - көпбұрышқа сырттай сызылған шеңбер радиусы.**

Ізделінді нүктелер жиынына тиісті жазықтықтың кез келген M(z) нүктесін алалық. Сонда есеп шарты бойынша мына теңдік орындалады: $|z-w_0|^2+|z-w_1|^2+\cdots+|z-w_{n-1}|^2=d^2$.

Теңдіктің сол бөлігіндегі әрбір қосылғышты түрлендірелік.

$$|z-w_i|^2=(z-w_i)(\overline{z-w_i})=(z-w_i)(\bar{z}-\overline{w_i})=z\bar{z}+w_i\overline{w_i}-z\overline{w_i}-\bar{z}w_i=|z|^2+R^2-z\overline{w_i}-\bar{z}w_i.$$

Сонда (2) теңдікті мына түрде жазуға болады: $d^2=n|z|^2+nR^2-n(\overline{w_0}+\cdots+\overline{w_{n-1}})-\bar{z}(w_0+\cdots+$

Матералдық нүктелер жүйесінің массалар центрі

Массалар центрінің кейбір қарапайым қасиеттерін математикалық модельдеу нәтижесі геометрияның әртүрлі есептерін шешуге мүмкін туғызады. Комплекс санды координаталы материалдық нүктелер жүйесінің массалар центрін математикалық модельдеуді қарастыралық.

$A_1, A_{2, ,\dots,} A_n$ - жазықтықтағы нүктелер жүйесі және $z_1, z_2, \dots, z_n$ - оларға сәйкес комплексті координаталар, ал $m_1, m_2, \dots, m_n$ - қосындысы 0-ге тең емес сәйкес нүктелерге жүктелген комплексті санды массалар болсын. Комплекс санды координаталары бар материалдық нүктелер $m_1A_1, m_2A_{2, ,\dots,} m_nA_n$ жүйесін қарастыралық, және P осы материалдық нүктелер жүйесінің массалар центрі болсын. Сонда оның координатасы «Архимедтің рычаг ережесі» бойынша

$$m_1(z_1 - z) + \cdots + m_n(z_n - z) = 0 \text{ немесе векторлық } m_1\overrightarrow{PA_1} + \cdots + m_n\overrightarrow{PA_n} = \vec{O}$$

теңдікті қанағаттандырады, бұдан P массалар центрінің координатасы $z = \dfrac{m_1z_1 + \dots + m_nz_n}{m_1 + \dots + m_n}$ болады.

Комплекс санды координаталы материалдық нүктелер жүйесі үшін массалар центрінің қасиеттері сақталады.

1. Қосындысы нөлдік емес әрбір координаталары комплекс сандар болатын материалдық нүктелер жүйесі бірмәнді массалар центріне ие болады.

2. Комплекс санды координаталы екі m_1A_1, m_2A_2 материалдық нүктелердің массалар центрі Z «Архимедтің рычаг ежесін» қанағаттандырады: $|m_1||z_1 - z| = |m_2||z_2 - z|$.

3. Егер комплекс санды координаталы материалдық m_1A_1, m_2A_2, … , m_kA_k нүктелер жүйесінің қосынды массасын олардың массалар центрімен алмастырсақ, онда m_1A_1, m_2A_2, … , m_nA_n жүйесінің массалар центрінің орны өзгермейді.

4. Комплекс санды координаталы материалдық нүктелердің массаларын нөлден өзге бір комплекс санға көбейткеннен жүйенің массалар центрінің орны өзгермейді.

Есеп 4. ***AB кесіндісі O нүктесінен айналу нәтижесінде A_1B_1 кесіндісіне көшеді. Сонда OAB_1 үшбұрышының OM медианасы AB_1 түзуіне перпендикуляр болатындығын дәлелдеңдер.***

Шешуі. **O, A, B нүктелерінің координаталары сәйкесінше 1, 1, b болсын. Сонда A_1 және B_1 нүктелері сәйкесінше i және bi координаттарға ие болады, ал AB кесіндінің ортасы M нүктесінің координатасы $m = \frac{1}{2(1+bi)}$ болады. Табамыз: $\frac{A_1B}{MO} = \frac{i-b}{1} = \frac{2i(i-b)}{i-b} = 2i$ - таза жорамал сан. Демек, кесінділердің перпендикулярлық белгісі бойынша OM және A_1B түзулері перпендикуляр болады.**

e

Есеп 5. ***Үшбұрыштың биіктігінің табанынан осы биіктікке сәйкес келмейтін екі қабырғасына перпендикуляр жүргізілді. Осы перпендикулярлардың табандарының арақашықтықғы үшбұрыштың биіктігін таңдап алуға байланысты емес екенін дәлелдеңіздер.***

Шешуі. **ABC үшбұрышы берілсін, оған сырттай сызылған теңбердің теңдеуі $z\bar{z} = 1$ болсын, мұнда z және $\bar{z}$ - өзара түйіндес комплекс сандар. Егер CD үшбұрыштың биіктігі болса, онда**

$d = \frac{1}{2}(a + b + c - \frac{ab}{c})$ - CD биіктіктің табаны D нүктесінің координатасы болып табылады, мұндағы a, b, c - сәйкесінше A, B, C төбелерінің комплекс координаталары. Сонда D нүктесінен AC және BC қабырғаларға жүргізілген перпендикулярлардың табандары M және N нүктелерінің комплекс координаталары сәйкесінше $m = \frac{1}{2(a+b+c-\frac{abc\bar{d}}{2})}$ және n=$\frac{1}{2(b+c+d-\frac{bc\bar{d}}{2})}$ болады.

Табамыз: $|a| = |b| = 1$ болғандықтан, $|m-n|$=$\frac{|(c-b)(b-c)(c-a)|}{4}$. Бұл өрнек a, b, c сандары бойынша симметриялы болғандықтан, қарастырып отырған арақашықтық үшбұрыштың биіктігін таңдап алуға байланысты емес.

Есеп 7. Жазықтықта төрт $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ шеңберлер берілген, ω_1, ω_2 шеңберлері A_1, B_1 нүктелерде қиылысады, ω_2, ω_3 шеңберлері A_2, B_2 нүктелерде, ω_3, ω_4 - A_3, B_3 нүктелерде және ω_4, ω_1 - A_4, B_4 нүктелерде қиылысады. Егер A_1, A_2, A_3, A_4 нүктелер бір шеңберде немесе түзуде жатса, онда B_1, B_2, B_3, B_4 нүктелері де бір шеңберде немесе түзуде жататынын дәлелдеңдер.

Шешуі. **Нүктелердің комплекс координаталары $A_1(a_1)$, $B_1(b_1)$, $A_2(a_2)$, $B_2(b_2)$, $A_3(a_3)$, $B_3(b_3)$, $A_4(a_4)$, $B_4(b_4)$ болсын. A_1, B_1, A_2, B_2 нүктелері бір шеңберге тиісті болғандықтан, мына қатынас**

$w_{1,2} = \frac{a_1-a_2}{b_2-a_2} : \frac{a_1-b_1}{b_2-b_1}$ нақты сан болады. Сол сияқты, қалған нүктелер үшін нақты сан болып табылады: $w_{2,3} = \frac{a_2-a_3}{b_3-a_3} : \frac{a_3-b_2}{b_2-b_2}$, $w_{3,4} = \frac{a_3-a_4}{b_4-a_4} : \frac{a_3-b_3}{b_4-b_3}$, $w_{4,1} = \frac{a_4-a_1}{b_1-a_1} : \frac{a_4-b_4}{b_1-b_4}$. Сондықтан, мына өрнек нақты сан болады:

$$(w_{1,2} \cdot w_{3,4}) : (w_{2,3} \cdot w_{4,1}) - \left(\frac{a_1-a_2}{a_3-a_2} : \frac{a_1-a_4}{a_3-a_4}\right)\left(\frac{b_2-b_1}{b_3-b_2} : \frac{b_1-b_4}{b_3-b_4}\right) \text{ - } (A_1A_3; A_2A_4)(B_1B_3; B_2B_4).$$

Демек, $(A_1A_3; A_2A_4)$ екіжақты қатынастың нақты сан болуынан $(B_1B_3; B_2B_4)$ нақты болуы алынады.

- **Сонымен, көптеген планиметрия есептерін комплекс сандардың көмегімен қарапайым түрде шешуге болады. Математикада, физикада және технологияда комплекс сандарды кеңінен қолданылады. Атап айтқанда, бұл геометриядағы есептерді шешудің әдіснамасын сызбаларға жүгінбей-ақ аналитикалық тәсілмен ұсынуға мүмкіндік береді.**

- **Әдебиеттер**

- **1. Яглом И. И. Комплексные числа и их применение в геометрии. // И. И. Яглом - М. : Физматгиз, 1963 г.**
- **2. Понарин Я. П. Алгебра комплексных чисел в геометрических задачах : книга для учащихся математических классов школ, учителей и студентов педагогических вузов. // Я. П. Понарин – М.: МЦНМО, 2004 г.**
- **3. Фомина Т. К. Методическое пособие по изучению раздела математики «Комплексные числа»: для студентов факультета иностранных языков и общеобразовательных дисциплин. //Т.К. Фомина, М. Я. Сафин - М. : Изд-во Российского университета дружбы народов, 2003 г.**
- **4. Абрамов А. М. Избранные вопросы математики. 10 класс. Факультативный курс. //А.М.Абрамов - М. : Просвещение, 1980 г.**
- **5. Гнеденко Б. В. Математика и математическое образование в современном мире. // Гнеденко Б.В. - М.: Просвещение, 1985 г.**
- **6. Маркушевич А. И. Комплексные числа и конформные отображения – М: //Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1954 г.**